Διδακτική αξιοποίηση της θεωρίας των van Hiele

Γιώργος Πιπίνος

Δάσκαλος, μετεκπαιδευμένος στο Διδασκαλείο "Αλ. Δελμούζος", μεταπτυχιακός φοιτητής στο ΤΕΠΑΕΣ του Πανεπιστημίου Αιγαίου*

1. Αναδρομή στη νεότερη μαθηματική εκπαίδευση

Με την είσοδο του 19^{ου} αι. και το ξεκίνημα της βιομηχανικής περιόδου, δημιουργήθηκε η ανάγκη για παροχή αυξημένων γνώσεων και οι προϋποθέσεις για ένα νέο προσανατολισμό της εκπαίδευσης, όπου τα μαθηματικά είχαν κυρίαρχο ρόλο. Η προοδευτική διαμόρφωσή τους σε ανεξάρτητο μάθημα και το ενδιαφέρον γύρω από την παιδαγωγική τους μετέβαλαν την καθιερωμένη μέθοδο διδασκαλίας *παρουσίαση του κανόνα - παροχή παραδειγμάτων - προσφορά προβλημάτων για επίλυση* σε μια συνεχή εξάσκηση και απόδοση τυποποιημένων γνώσεων.[1]

Στις αρχές του 20^{ού} αι. δρομολογήθηκαν οργανωμένες προσπάθειες για την αναμόρφωση της ύλης και την αλλαγή του τρόπου διδασκαλίας των μαθηματικών στο σχολείο με τους, μεταξύ άλλων, *F. Klein* στη Γερμανία, *J. Perry* στην Αγγλία και *E. Moore* στην Αμερική. Οι προσπάθειες αυτές σηματοδότησαν τις μεταβολές που ακολούθησαν όσον αφορά την οργάνωση της διδασκαλίας και την επιλογή της διδασκόμενης ύλης, με τη διαμόρφωση ενός προγράμματος που έδινε έμφαση στους υπολογισμούς και τις γραφικές παραστάσεις, και παρουσίαζε την ύλη με εργαστηριακές πρακτικές μεθόδους.

Αργότερα, τη δεκαετία του '30, στη Γαλλία έγιναν προτάσεις για ουσιαστική αλλαγή των προγραμμάτων εκπαίδευσης από τους *Bourbaki*,[2] οι οποίοι παρουσίασαν τα μαθηματικά με έναν ενοποιημένο τρόπο και θεμελιωμένα στη *Θεωρία των Συνόλων*, βάζοντας έτσι τις βάσεις των λεγόμενων ***νέων ή μοντέρνων μαθηματικών***. Σκοπός της εισαγωγής των συνόλων ήταν η εκμάθηση των βασικών αρχών της δομής των μαθηματικών, ώστε τα παιδιά να τις ανακαλούν στη μνήμη τους και να στηρίζονται σ' αυτές, όταν χρειάζεται. Οι προτάσεις των *Bourbaki*

---

* Με προϋπηρεσία (ως αποσπασμένος κατά τα ακαδημαϊκά έτη 1999-01 για τις Πρακτικές Ασκήσεις των φοιτητών/-τριών) στο *Εργαστήριο Μαθηματικών Διδακτικής και Πολυμέσων* του Π.Τ.Δ.Ε. Πανεπιστημίου Αιγαίου

1 Τουμάσης, Μπ., *Σύγχρονη Διδακτική των Μαθηματικών*, Gutenberg, Αθήνα 2000, σελ. 52-53.

2 Ομάδα νεαρών κυρίως μαθηματικών, αφού το καταστατικό τους προέβλεπε πως όποιος συμπλήρωνε το 50ό έτος της ηλικίας του διαγραφόταν από την ομάδα.

βρήκαν οπαδούς αλλά και σκληρούς αντιπάλους, με αποτέλεσμα η αλλαγή που πρότειναν να επιχειρηθεί 25 χρόνια μετά, αρχικά στη Γαλλία και αργότερα σε πολλές άλλες ευρωπαϊκές χώρες. Στην Ελλάδα η διδασκαλία των *μοντέρνων μαθηματικών* εισήχθη στις αρχές της δεκαετίας του '60, αλλά ουσιαστικά εφαρμόστηκε το 1964 με την εισαγωγή τής θεωρίας των συνόλων στη Α′ Γυμνασίου όλων των σχολείων της χώρας.[3]

Ένα νέο κύμα μεταρρυθμίσεων άρχισε να εκδηλώνεται από τα μέσα περίπου της δεκαετίας του '70, περισσότερο ως αντίδραση στην αποτυχία των *μοντέρνων μαθηματικών*, με τα οποία παραμελούνταν η διδακτική των μαθηματικών και δεν δινόταν η απαιτούμενη βαρύτητα στη σύνδεσή τους με τις φυσικές επιστήμες και τις εφαρμογές. Εκλήφθηκε τότε, πως η υπερβολική ενασχόληση με τη δομή και την αυστηρότητα του περιεχομένου ήταν υπεύθυνη για τη μείωση των επιδόσεων των μαθητών. Αναπτύχθηκε έτσι η κίνηση ***πίσω στα βασικά***, η οποία είχε ως κύρια χαρακτηριστικά της την εγκατάλειψη της θεωρίας των συνόλων στο μεγαλύτερο μέρος τής διδασκαλίας των μαθηματικών εννοιών, την έμφαση στις υπολογιστικές δεξιότητες και τους μπιχεβιοριστικούς στόχους της διδασκαλίας, και την στροφή προς τις μεγάλες μάζες των μαθητών. Πάντως, αν και σε μερικές περιπτώσεις η μεταρρυθμιστική αυτή τάση έδωσε θετικά αποτελέσματα, ορισμένες φορές εκδηλώθηκε ως ο αντίποδας των μοντέρνων μαθηματικών και έφτασε στο άλλο άκρο. Υποδεικνύοντας την επιστροφή στη *μηχανιστική και τυποποιημένη μάθηση* έδωσε λαβή για επικρίσεις, γιατί οι μαθητές υστερούσαν στις δεξιότητες επίλυσης των προβλημάτων.[4]

Οι σύγχρονες, καινοτόμες προτάσεις για τη διδασκαλία των μαθηματικών αμφισβητούν τόσο τη στρουκτουραλιστική δομή[5] –στη βάση της θεωρίας των συνόλων– όσο και τη μετάδοση τυποποιημένων γνώσεων από το δάσκαλο στο μαθητή. Εισάγουν μια σειρά από αλλαγές στο θεωρητικό επίπεδο αλλά και στο περιεχόμενο της διδασκαλίας. Για παράδειγμα, οι *Αρχές και Πρότυπα για τα Σχολικά Μαθηματικά,* που δημιουργήθηκαν από το *Εθνικό Συμβούλιο Καθηγητών Μαθηματικών* (NCTM) των ΗΠΑ, υποστηρίζουν ότι *όλοι οι μαθητές* πρέπει να μάθουν *ενδιαφέροντα μαθηματικά* και πως η *διαδικασία επίλυσης προβλημάτων* πρέπει να αποτελεί το επίκεντρο των σχολικών μαθηματικών.[6] Η μεταρρύθμιση ***Μαθηματικά για όλους***, που ξεκίνησε τη δεκαετία του '80 και βρίσκεται ακόμα σε εξέλιξη, θεωρεί ότι κάθε άτομο πρέπει να κατανοεί και να επικοινωνεί με άνεση στη μαθηματική γλώσσα, να έχει αυτοπεποίθηση και ευχέρεια στη λογική σκέψη, και να διακρίνεται από την ικανότητα να αναγνωρίζει και να εφαρμόζει τις μαθηματικές γνώσεις σε *πραγματικά προβλήματα*.

---

3 Εξαρχάκος, Θ.Γ., *Διδακτική των Μαθηματικών*, Ελληνικά Γράμματα, Αθήνα 1993, σελ. 62-65.

4 Τουμάσης, Μπ., ό.π., σημ. 1, σελ. 57-58.

5 *Στρουκτουραλισμός* ή *δομισμός* (από το structure: δομή).

6 Λεμονίδης, Χ., Μια νέα πρόταση διδασκαλίας στα μαθηματικά για τις πρώτες τάξεις του δημοτικού σχολείου, *Θέματα στην Εκπαίδευση*, *3:1*, 5-22, Leader Books Αθήνα, 2002, σελ. 5-6, 8.

Στην Ελλάδα, μετά τη μεταρρύθμιση των *νέων μαθηματικών*, όχι μόνο δεν έγιναν σημαντικές μεταβολές στη μαθηματική εκπαίδευση, αλλά ιδιαίτερα στα μαθηματικά της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, παρατηρήθηκε στασιμότητα.[7] Μόλις το 1992 συστήθηκαν από το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο ομάδες εργασίας για τη σύνταξη ενός νέου Προγράμματος Σπουδών των Μαθηματικών της εννιάχρονης υποχρεωτικής εκπαίδευσης. Το 1998 διαμορφώθηκε το *Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών* (Ε.Π.Π.Σ.), το οποίο αντικατόπτριζε την απαιτούμενη σύνδεση του μαθήματος από το Νηπιαγωγείο έως το Λύκειο και καταδείκνυε ότι τα μαθηματικά συνίστανται από έννοιες και δεξιότητες συνδεδεμένες με την πραγματικότητα και τον πολιτισμό. Το 2001 συντάχθηκε το *Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών* (Δ.Ε.Π.Π.Σ.), με το οποίο αφενός προβλεπόταν η διατήρηση των ξεχωριστών μαθημάτων και αφετέρου προωθούνταν η ολιστική αντίληψη και ο συσχετισμός της γνώσης σε κάθετο και οριζόντιο άξονα, με την επεξεργασία εννοιών που ανήκαν στον ίδιο ή σε διαφορετικούς τομείς επιστήμης. Μολονότι το Δ.Ε.Π.Π.Σ. επρόκειτο να εφαρμοστεί από το σχολικό έτος 2003-2004, ουσιαστικά παρέμεινε ανενεργό, ενώ τέθηκαν και ερωτήματα για τις προοπτικές εφαρμογής του.[8]

2. Ρεαλιστικά μαθηματικά

Η διδακτική θεωρία της ***Ρεαλιστικής Μαθηματικής Εκπαίδευσης*** άρχισε να αναπτύσσεται στην *Ολλανδία* τη δεκαετία του '70 με το πρόγραμμα *Wiskobas (Μαθηματικά στη Δημοτική Εκπαίδευση)* και κορυφώθηκε στη δεκαετία του '80, όχι τόσο ως αντίδραση στο στρουκτουραλισμό, όπως συνέβη με τις μεταρρυθμιστικές κινήσεις άλλων χωρών –μια και τα *νέα μαθηματικά* δεν εφαρμόστηκαν στο ολλανδικό σχολείο–, αλλά περισσότερο ως εναντίωση στη μηχανιστική προσέγγιση των μαθηματικών, που επικρατούσε.[9]

Πάντως, τα *ρεαλιστικά μαθηματικά* δεν διαφοροποιούνται μόνο από τη μηχανιστική προσέγγιση, στην οποία, με αφετηρία το τυπικό αριθμητικό επίπεδο και χωρίς να διακρίνονται επίπεδα στην όλη διαδικασία ή να δίνεται σημασία στην ελεύθερη δημιουργία και τον αναστοχασμό, ως μάθηση θεωρείται η αναπαραγωγή της γνώσης. Διαφέρουν, επίσης, από τη στρουκτουραλιστική προσέγγιση, στην οποία δίνεται έμφαση στο αριθμητικό σύστημα θέσης, ενώ η συγκεκριμενοποίηση των πράξεων γίνεται με τη βοήθεια δομημένου υλικού, χω-

7 Καραγεώργος, Δ., *Το πρόβλημα και η επίλυσή του – Μια διδακτική προσέγγιση*, Σαββάλας, Αθήνα 2000, σελ. 45-49.

8 ΥΠ.Ε.Π.Θ.-Π.Ι., *Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών (Δ.Ε.Π.Π.Σ.) και Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών (Α.Π.Σ.) Υποχρεωτικής Εκπαίδευσης* (τόμ. Α′), Αθήνα 2002, σελ. 9-13. Χιονίδου-Μοσκοφόγλου, Μ., Το Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών (Δ.Ε.Π.Π.Σ.) των Μαθηματικών στην υποχρεωτική εκπαίδευση, *Επιθεώρηση Εκπαιδευτικών Θεμάτων*, *7*, 80-100, Αθήνα 2002, σελ. 80, 86.

9 Λεμονίδης, Χ., ό.π., σημ. 6, σελ. 7.

ρίς να υπάρχει σύνδεση μεταξύ των εμπειρικών υπολογισμών, του θεωρητικού προτύπου και των εφαρμογών.[10]

Σε αντιδιαστολή με τις προηγούμενες θεωρήσεις, τα *ρεαλιστικά μαθηματικά* πρεσβεύουν ότι η εκμάθηση των μαθηματικών εννοιών είναι μια *κατασκευαστική διαδικασία*, η οποία δεν μπορεί ούτε να μεταδοθεί ούτε απλώς να παρουσιαστεί. Σε αυτό το σημείο συμφωνούν με τα κονστρουκτιβιστικά (εποικοδομητικά) μοντέλα μάθησης. Παρόλο, όμως, που και στη ρεαλιστική διδασκαλία δίνεται ιδιαίτερη σημασία στις άτυπες γνώσεις και κατασκευές των παιδιών, ωστόσο γίνεται προσπάθεια να καθοδηγηθεί η οικοδόμηση των θεωριών τους. Κάθε διδασκαλία σχεδιάζεται έτσι, ώστε οι μαθητές να κάνουν από τη μια μόνοι τους τις ανακαλύψεις, αλλά, από την άλλη, το τι θα ανακαλύψουν ή η σειρά με την οποία θα πραγματοποιήσουν τις ανακαλύψεις προκαθορίζεται από το δάσκαλο.[11]

Κατά τη διεξαγωγή της *ρεαλιστικής διδασκαλίας* οι μαθητές γίνονται συνεχώς δέκτες αλληλεπιδραστικών ερεθισμάτων. Παροτρύνονται για τη δημιουργία συσχετισμών, τον αναστοχασμό τής μαθησιακής διαδικασίας που έχει προηγηθεί και την εκτίμηση των ενεργειών που θα ακολουθήσουν. Παίρνοντας πάντα υπόψη την προσωπική διαδικασία σκέψης κάθε παιδιού αλλά και του συνόλου, οι μαθητές έχουν την ευκαιρία να παρουσιάσουν τα δικά τους προβλήματα και να επεξεργαστούν τόσο τις δικές τους, *ελεύθερες δημιουργίες* όσο και αυτές των συμμαθητών τους. Η μάθηση, δηλαδή, δεν αποτελεί μια ατομική δραστηριότητα, αλλά κάτι που διενεργείται σε επαφή με τους άλλους και εξαρτάται από το κοινωνικοπολιτισμικό πλαίσιο.[12] Η πραγματικότητα του περιβάλλοντος χώρου γίνεται ταυτόχρονα η πηγή και το πεδίο εφαρμογής των μαθηματικών εννοιών.

Η ονομασία *Ρεαλιστική Μαθηματική Εκπαίδευση* καταδεικνύει αφενός ότι τα μαθηματικά συνδέονται με την πραγματικότητα και αφετέρου ότι οι στόχοι που θέτει, δεν υπερβαίνουν τη δυνατότητα πραγματοποίησής τους από τη σχολική κοινότητα. Για την πληρέστερη κατανόησή τους τα *ρεαλιστικά μαθηματικά* μπορούν να περιγραφούν με αναφορές:[13]

- ➢ στη *διδακτική φαινομενολογία* του *Freudenthal*,
- ➢ στην *προοδευτική μαθηματικοποίηση* της ομάδας *Wiskobas*, και
- ➢ στη *θεωρία επιπέδων* των *van Hiele*.

---

10 Treffers, A., Το Διδακτικό Υπόβαθρο ενός προγράμματος Μαθηματικών στο Δημοτικό Σχολείο, στο: L. Streefland (ed.), *Ρεαλιστικά Μαθηματικά στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση* (επιμ. Ε. Κολέζα) (σελ. 18-58), Leader Books, Αθήνα 2000, σελ. 26-31.

11 Gravenmeijer, K.P.E., Ένας διδακτικο-θεωρητικός συλλογισμός σχετικά με τη χρήση χειρισμών, στο: L. Streefland (ed.), *Ρεαλιστικά Μαθηματικά στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση* (επιμ. Ε. Κολέζα) (σελ. 59-82), Leader Books, Αθήνα 2000, σελ. 76-77.

12 Treffers, A., ό.π., σημ. 10, σελ. 21-24.

13 Κολέζα, Ε., Πρόλογος, στο: L. Streefland (ed.), *Ρεαλιστικά Μαθηματικά στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση* (επιμ. Ε. Κολέζα) (σελ. iv-xx), Leader Books, Αθήνα 2000, σελ. vi-vii.

2.1. Διδακτική φαινομενολογία

Η σημερινή μορφή των *ρεαλιστικών μαθηματικών* έχει επηρεαστεί από τον ***Hans Freudenthal***, ο οποίος απομάκρυνε την έρευνα της ομάδας *Wiskobas* από τα φορμαλιστικά *μοντέρνα μαθηματικά* και την οδήγησε στην αντιμετώπιση των μαθηματικών ως μιας ***ανθρώπινης δραστηριότητας***, συνδεδεμένης με την πραγματικότητα και σχετικής με τις εμπειρίες των παιδιών από τον κοινωνικό τους περίγυρο.

Ο *Freudenthal*, με τη ***διδακτική φαινομενολογία***[14] του, επισημαίνει ότι ο δάσκαλος δεν πρέπει να ξεκινά με την παρουσίαση των μαθηματικών εννοιών και την αναζήτηση στη συνέχεια κοινών δομών και υλικού για τη συγκεκριμενοποίησή τους, αλλά πως πρέπει να φέρνει τους μαθητές σε επαφή με ***φαινόμενα*** για τα οποία οι μαθηματικές έννοιες και δομές αποτελούν τα εργαλεία οργάνωσης της μελέτης τους. Η *ρεαλιστική διδασκαλία,* δηλαδή, θέτει ως σημείο εκκίνησης της μαθησιακής διαδικασίας την εξερεύνηση πραγματικών καταστάσεων και φαινομένων, τα οποία περιέχουν τις έννοιες και τις δομές που μελετούνται (π.χ. η έννοια της διαίρεσης περιέχεται σε καταστάσεις δίκαιης μοιρασιάς, σχηματισμού ισοπληθών ομάδων κ.τ.λ.). Η διερεύνηση γίνεται κάτω από όσο το δυνατόν περισσότερες *οπτικές γωνίες*, δημιουργώντας ορισμένες φορές και *καταστάσεις σύγκρουσης* με τις παγιωμένες γνώσεις των παιδιών.[15] Στόχος είναι ο σχηματισμός διαισθητικών εννοιών, οι οποίες θα αποτελέσουν τη βάση για την ανακάλυψη και επανακατασκευή των μαθηματικών εννοιών. Εξετάζοντας ποικίλες δραστηριότητες, επιδιώκεται ακόμη η σύνδεση των επιμέρους μαθηματικών μικρόκοσμων[16] των παιδιών, οι οποίοι αρχικά δείχνουν να μην έχουν σχέση και να μη συνδέονται μεταξύ τους. Οι μαθητές, με την εμπλοκή τους σε αυτή τη διαδικασία ***επανεφεύρεσης*** της μαθηματικής γνώσης, αποκτούν την ικανότητα να αποδίδουν μόνοι τους το νόημα των μαθηματικών εννοιών, να τις χρησιμοποιούν για τη δημιουργία συσχετισμών και να τις εφαρμόζουν λειτουργικά σε ευρύτερες περιοχές. Μια τέτοια διαδικασία οικοδόμησης των γνώσεων και δεξιοτήτων απαιτεί χρόνο και, κινούμενη σε διάφορα επίπεδα αφαίρεσης, εξυπηρετείται, τουλάχιστον στα πρώτα της στάδια, από συγκεκριμένο οπτικό υλικό, πίνακες, σχήματα, διαγράμματα κ.ά..[17]

2.1.1. Πρόβλημα πλαίσιο

Η φαινομενολογική εξερεύνηση μιας μαθηματικής έννοιας γίνεται με προβλήματα διατυπωμένα σε ένα συγκεκριμένο πραγματικό πλαίσιο. Η έννοια του

---

14 Freudenthal, H., *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*, D. Reidel, Dordrecht 1983. Freudenthal, H., *Weeding and Sowing: Preface to a Science of Mathematical Education*, D. Reidel, Dordrecht 1980, pp. 170-304.

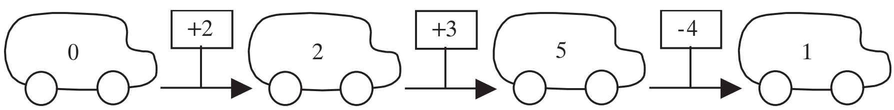
15 Gravenmeijer, K.P.E., ό.π., σημ. 11, σελ. 73-74.

16 Ως *μικρόκοσμος* νοείται η οργάνωση των γνώσεων γύρω από μια συγκεκριμένη θεματική περιοχή (π.χ. μέτρησης, αλγοριθμικών υπολογισμών, χρημάτων).

17 Κολέζα, Ε., ό.π., σημ. 13, σελ. ix-xii.

προβλήματος πλαισίου *(context problem)* κατέχει κεντρική θέση στα ρεαλιστικά μαθηματικά και είναι ευρύτερη από εκείνη του παραδοσιακού *λεκτικού προβλήματος*. Το πλαίσιο δεν αποτελείται μόνο από ένα σύνολο αριθμητικών δεδομένων που περιγράφουν μια πλαστή-κοινότοπη ιστορία, η οποία τις περισσότερες φορές έρχεται σε αντιπαράθεση με την καθημερινή γνώση των μαθητών και δεν είναι τίποτα περισσότερο από ένα μεταμφιεσμένο λεκτικό πρόβλημα. Αντίθετα, το *πρόβλημα πλαίσιο* αναφέρεται σε μια πραγματική κατάσταση και στηρίζεται στις προϋπάρχουσες άτυπες γνώσεις από τη σφαίρα ενδιαφερόντων των μαθητών.[18] Πολλές φορές δεν περιορίζεται στο φυσικό ή στον κοινωνικό κόσμο, αλλά επεκτείνεται και στην *πραγματικότητα της φαντασίας* τους. Το πρόβλημα πλαίσιο μπορεί να εμφανίζεται με τη μορφή παιχνιδιού ή εξιστόρησης και να αναπαριστάνεται με σχήματα ή γραφήματα.[19]

Χαρακτηριστικό παράδειγμα πλαισίου είναι αυτό που χρησιμοποιήθηκε για τη διδασκαλία της πρόσθεσης και της αφαίρεσης σε εξάχρονα παιδιά κατά τη διάρκεια ερευνητικού προγράμματος που διενεργήθηκε στην Ολλανδία. Οι δραστηριότητες βασίστηκαν σε ένα βιβλίο εργασίας με τίτλο *«Το Λεωφορείο»*, το οποίο ήταν γραμμένο σε μαθηματική γλώσσα διαφορετική από τη συνηθισμένη. Η νέα γλώσσα χρησιμοποίησε *τόξα* σε αντικατάσταση του *ίσον* της μηχανιστικής εκπαίδευσης, ενώ οι αριθμοί που γράφονταν στο πλαίσιο του λεωφορείου φανέρωναν τον αριθμό των επιβατών που βρίσκονταν μέσα σ' αυτό και οι πινακίδες στις στάσεις έδειχναν τον αριθμό των ατόμων που ανέβαιναν ή κατέβαιναν *(σχ. 1)*.



Σχήμα 1: Παράσταση του ρεαλιστικού προβλήματος πλαισίου «Το Λεωφορείο»

Με την επεξεργασία ενός τέτοιου προβλήματος πλαισίου οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να δραματοποιήσουν τις δραστηριότητές του και να υλοποιήσουν τις δικές τους ιδέες, εμπειρίες ή φαντασιώσεις, οι οποίες συχνά έρχονται σε αντιπαραβολή με τις ιδέες των συμμαθητών τους ή με τις μαθηματικές ιδιότητες που είναι άγνωστες και πρέπει να γίνουν κτήμα τους. Σταδιακά, μέσα από τις διεργασίες της *μαθηματικοποίησης* οι έννοιες εγκαθιδρύονται, ενώ το αρχικό νόημα των βοηθημάτων εξασθενεί, επιτρέποντας τη μεταφορά της σκέψης από το ερμηνευτικό πλαίσιο (λεωφορείο) στο αριθμητικό πλαίσιο των απλών πρά-

18 Κολέζα, Ε., *Γνωσιολογική και Διδακτική Προσέγγιση των Στοιχειωδών Μαθηματικών Εννοιών*, Leader Books, Αθήνα 2000, σελ 147-148.

19 Κολέζα, Ε., Πρόλογος ... ό.π., σημ. 13, σελ. xvi-xix.

ξεων.[20] Η ρεαλιστική εκπαίδευση *γεφυρώνει* με αυτό τον τρόπο το χάσμα ανάμεσα στην άτυπη, διαισθητική και συνδεδεμένη με το πραγματικό πλαίσιο του προβλήματος διαδικασία, και στην τυπική, αναστοχαστική, αφαιρετική και βαθμιαία σχηματοποιημένη και γενικευμένη διαδικασία.

2.2 Προοδευτική μαθηματικοποίηση

Ο *Freudenthal* θεωρεί τη *μαθηματικοποίηση* των παιδιών ως μια διαδικασία αμφίδρομου περάσματος ανάμεσα στον πραγματικό κόσμο και σ' αυτόν των συμβόλων.[21] Ορίζεται, από τον ίδιο και τους συνεργάτες του, ως μια δραστηριότητα οργάνωσης που διενεργείται στο πλαίσιο της μαθησιακής διαδικασίας, σύμφωνα με την οποία οι γνώσεις και οι δεξιότητες που έχουν ήδη αποκτηθεί εφαρμόζονται για τη μελέτη άγνωστων μαθηματικών σχέσεων και δομών. Η μαθηματικοποίηση στα ρεαλιστικά μαθηματικά ερμηνεύεται με την εκτύλιξή της σε δύο φάσεις: την *οριζόντια* και την *κάθετη*.

Στην ***οριζόντια μαθηματικοποίηση*** η ρεαλιστική κατάσταση προβληματισμού *μεταφράζεται* σε μαθηματικό πρόβλημα και μοντελοποιείται, ώστε μέσω της αναπαράστασής της και της ανακάλυψης των σχέσεων που ενυπάρχουν να εντοπιστούν οι μαθηματικές έννοιες και δομές. Οι μαθητές έχουν την ευχέρεια να επιλέξουν τα εργαλεία και τις μεθόδους που θεωρούν ότι εκφράζουν καλύτερα τις άτυπες ιδέες και στρατηγικές τους, σε ένα γενικότερο πλαίσιο *επανεφεύρεσης-επανακατασκευής* της μαθηματικής γνώσης. Η καθαυτό μαθηματική επεξεργασία αυτής της γνώσης γίνεται στη συνέχεια, κατά την ***κάθετη μαθηματικοποίηση***, όπου το πρόβλημα αντιμετωπίζεται με αμιγή μαθηματικά εργαλεία (τύπους, αποδείξεις σχέσεων, γενικεύσεις κ.τ.λ.). Η νέα μαθηματική έννοια ενισχύεται, ενώ οι γνώσεις και οι δεξιότητες οικοδομούνται σταδιακά και επεκτείνονται με ενσυνείδητο τρόπο στον κόσμο των συμβόλων, με απώτερο στόχο τη μεταφορά τους σε διάφορους χώρους εφαρμογής. Δηλαδή, ενώ η οριζόντια μαθηματικοποίηση οδηγεί από τον κόσμο των προσωπικών αισθήσεων στον κόσμο των συμβόλων, η κάθετη μαθηματικοποίηση μεταφέρει στοιχεία από τον κόσμο των συμβόλων στον κόσμο των αισθήσεων και της πραγματικότητας.[22]

Σε κάθε στάδιο της μαθηματικοποίησης, στο πλαίσιο μιας αλληλεπιδραστικής διδασκαλίας, η ατομική εργασία συνδυάζεται με ομαδική συζήτηση, ανταλλαγή απόψεων, αναστοχασμό των αποφάσεων και των ενεργειών, στάθμιση πλεονεκτημάτων και μειονεκτημάτων της πορείας επίλυσης ενός προβλήματος, διατύπωση απόψεων για τα επιχειρήματα που εκφράζονται, ερμηνεία και αξιολόγηση των αποτελεσμάτων. Παρέχονται έτσι ενδείξεις στο δάσκαλο, αλλά και στους

20 Brink, F.J. van den, Η ρεαλιστική αριθμητική στην εκπαίδευση για τα μικρά παιδιά, στο: L. Streefland (ed.), *Ρεαλιστικά Μαθηματικά στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση* (επιμ. Ε. Κολέζα) (σελ. 83-100), Leader Books, Αθήνα 2000, σελ. 83-92.

21 Brink, F.J. van den, ό.π., σημ. 20, σελ. 90.

22 Κολέζα, Ε., Πρόλογος, ό.π., σημ. 13, σελ. xii-xiv, και Treffers, A., ό.π., σημ. 10, σελ. 32-34.

ίδιους τους μαθητές, για το στίγμα της θέσης τού καθενός στο μαθησιακό πεδίο και του βαθμού προόδου του στη διαδικασία μαθηματικοποίησης.

3. Θεωρία των επιπέδων γεωμετρικής σκέψης

Όπως και με οποιαδήποτε άλλη μαθηματική έννοια, έτσι και με τις έννοιες του γεωμετρικού χώρου η διδασκαλία θα πρέπει να ξεκινά, σύμφωνα με τα ρεαλιστικά μαθηματικά, από τον πραγματικό κόσμο με δραστηριότητες οι οποίες μπορούν να αναδείξουν τις διαισθητικές απόψεις των παιδιών. Καθημερινές εμπειρίες και φαινόμενα εμπεριέχουν ποικιλία *γεωμετρικών δραστηριοτήτων*, στην προσφορά και την επεξεργασία των οποίων πρέπει να κυριαρχούν ανελικτικά τα ρήματα: *παρατηρώ* (άμεσα και υπό γωνία), *προσανατολίζω και προσδιορίζω*, *αντιλαμβάνομαι*, *μετασχηματίζω* (μεγέθυνση, περιστροφή, συμμετρία κ.ά.), *σχεδιάζω και κατασκευάζω*, *μετρώ και υπολογίζω*.[23]

Το μοντέλο των Ολλανδών *Piere Marie van Hiele* και της συζύγου του *Dina van Hiele-Geldol*, σύμφωνα με το οποίο η γεωμετρική –και γενικότερα η μαθηματική– σκέψη των παιδιών εξελίσσεται σε διαδοχικά επίπεδα, προέκυψε το 1957 με την εκπόνηση των διδακτορικών διατριβών τους.[24] Αν και προηγείται χρονικά των ρεαλιστικών μαθηματικών και παρουσιάζει σημαντικές ομοιότητες με τη στρουκτουραλιστική θεωρία του *Dienes*,[25] αφού και εδώ η μετάβαση σε επόμενο επίπεδο προϋποθέτει την κατάκτηση του προηγούμενου με την προσωπική εμπλοκή του μαθητή, ωστόσο, στα πρώτα επίπεδα των *van Hiele* και πριν από τη μετάβαση στις τυπικές λειτουργίες των επόμενων επιχειρείται η φαινομενολογική εξερεύνηση εκείνων των πλευρών της πραγματικότητας, για τις οποίες οι μαθηματικές έννοιες και δομές αποτελούν τα οργανωτικά εργαλεία τους. Αντίληψη, δηλαδή, που σχετίζεται με τη διδακτική φαινομενολογία του *Freudenthal*. Επιπλέον, το μοντέλο των *van Hiele* αποτέλεσε ένα από τα θεωρητικά στηρίγματα των μελετών της ομάδας *Wiskobas* και καθόρισε σε σημαντικό βαθμό τον προσανατολισμό της.[26]

Στα πέντε επίπεδα γεωμετρικής σκέψης που προτείνονται από τους δύο Ολλανδούς παιδαγωγούς το περιεχόμενο διαφοροποιείται τόσο ως προς τη φύση όσο και ως προς την οργάνωσή του:[27]

---

23 Κολέζα, Ε., *Γνωσιολογική..*, ό.π., σημ. 18, σελ. 280-287. Moor, E. de, Η διδασκαλία της Γεωμετρίας στην Ολλανδία (ηλικίες 4-14) –Η ρεαλιστική προσέγγιση–, στο: L. Streefland (ed.), *Ρεαλιστικά Μαθηματικά στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση* (επιμ. Ε. Κολέζα) (σελ. 131-153), Leader Books, Αθήνα 2000, σελ. 135-148.

24 Φιλίππου, Γ. - Χρίστου, Κ., *Διδακτική των Μαθηματικών*, Τυπωθήτω - Γ. Δαρδανός, Αθήνα 2000, σελ. 297.

25 Ο *Z.P. Dienes*, μετά από στενή συνεργασία με τον *Bruner*, σχεδίασε και χρησιμοποίησε συγκεκριμένο υλικό και παιχνίδια, με στόχο τη δόμηση διαδοχικών μαθησιακών επιπέδων.

26 Κολέζα, Ε., Πρόλογος ..., ό.π., σημ. 13, σελ. vii-xi.

27 Ζάχος, Ι.Β., Αξιολόγηση του Επιπέδου Γεωμετρικής Σκέψης van Hiele των Μαθητών της Β′ Τάξης του

- ***Πρώτο επίπεδο:*** *Αναγνώρισης ή Οπτικοποίησης.*
  Οι μαθητές αντιλαμβάνονται τα σχήματα ως μια ολότητα, με βάση τη μορφή τους. Δεν μπορούν να διακρίνουν τα συστατικά τους μέρη (πλευρές, γωνίες κ.λπ.), ούτε να κατανοήσουν ότι υπάρχουν ιδιότητες που τα χαρακτηρίζουν. Το λεξιλόγιο που χρησιμοποιούν αφορά περιορισμένες γεωμετρικές έννοιες, ενώ το συγκεκριμένο υλικό που επεξεργάζονται αποτελεί το αντικείμενο της μαθησιακής διαδικασίας.
- ***Δεύτερο επίπεδο:*** *Περιγραφικό ή Ανάλυσης.*
  Το κυριότερο χαρακτηριστικό γνώρισμα της σκέψης των μαθητών σε αυτό το επίπεδο είναι η αναγνώριση των συστατικών στοιχείων των σχημάτων και η περιγραφή των ιδιοτήτων τους, με ταυτόχρονη ανάπτυξη του κατάλληλου λεξιλογίου. Η έρευνα των μαθητών για τις σχέσεις μεταξύ των σχημάτων έχει κυρίως εμπειρικό χαρακτήρα, ενώ αδυνατούν ακόμη να προβούν σε συμπεράσματα, λογικές αποδείξεις και τυπικό ορισμό των ιδιοτήτων.
- ***Τρίτο επίπεδο:*** *Άτυπης Αφαίρεσης ή Διάταξης.*
  Οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να διατάσσουν λογικά τα σχήματα και τις ιδιότητές τους και να αντιλαμβάνονται το ρόλο των ορισμών τους. Αντικείμενο έρευνας γίνονται οι ίδιες οι σχέσεις, ενώ γίνεται κατανοητή και η έννοια της συμπερίληψης κλάσεων (π.χ. αναγνωρίζεται το τετράγωνο ως ειδική περίπτωση ορθογωνίου).
- ***Τέταρτο επίπεδο:*** *Τυπικής Αφαίρεσης ή Επαγωγής.*
  Η γεωμετρική σκέψη αυτού του επιπέδου επιτρέπει την αναπαραγωγή ή σύνθεση αποδείξεων, τη χρήση λογικών αλυσίδων, την ανακάλυψη σχέσεων και τη συναγωγή γενικεύσεων. Κατανοούνται ο ρόλος των αξιωμάτων και η συσχέτιση των *ικανών* και *αναγκαίων* συνθηκών, ενώ γίνεται χρήση αποδεικτικών μεθόδων, όπως η *εις άτοπον απαγωγή*.
- ***Πέμπτο επίπεδο:*** *Αυστηρότητας ή Θεωρητικό.*
  Είναι το ανώτερο επίπεδο γεωμετρικής σκέψης στο οποίο μπορεί να φτάσει ένας μαθητής. Σε αυτό το επίπεδο εξελίσσεται η ικανότητα για ολοκληρωμένες αποδείξεις, αφηρημένους συλλογισμούς, ανάπτυξη θεωριών, γενικεύσεις και ευρύτερες εφαρμογές.
  Το πέμπτο επίπεδο δεν αναπτύχθηκε στις αρχικές εργασίες των van Hiele, επειδή ακόμη και τελειόφοιτοι μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης σπάνια το κατακτούν.[28] Όσον αφορά τους μαθητές τού Δημοτικού Σχολείου, σημειώνεται ότι δύσκολα μπορούν να ξεπεράσουν το 2ο ή το 3ο επίπεδο γεωμετρικής σκέψης.
  Όπως αναφέρθηκε ήδη, ένα βασικό χαρακτηριστικό των επιπέδων σκέψης

Λυκείου, στο: Φρ. Καλαβάσης - Μ. Μεϊμάρης (επιμ.), *Αξιολόγηση και Διδασκαλία των Μαθηματικών* (σελ. 161-179), Gutenberg - Πανεπιστήμιο Αιγαίου, Αθήνα 2000, σελ. 163-167. Κοντογιάννης, Δ. - Ντζιαχρήστος, Β., *Βασικές έννοιες της Γεωμετρίας* (4η έκδ.), Αθήνα 2003, σελ. 437-439.

28 Τουμάσης, Μπ., ό.π., σημ. 1, σελ. 343-350.

είναι ότι οι μαθητές περνούν διαδοχικά από το ένα επίπεδο στο άλλο χωρίς να είναι δυνατή η υπερπήδησή τους. Καθένα έχει τη δική του γλώσσα-σύμβολα-συστήματα σχέσεων και έτσι, όταν ένας μαθητής βρίσκεται σε διαφορετικό επίπεδο από τους συμμαθητές του ή το δάσκαλο, τότε δεν μπορεί να τους κατανοήσει για να επικοινωνήσει μαζί τους, και αντίστροφα. Επισημαίνεται ότι η ωρίμανση και η μετάβαση σε ανώτερο επίπεδο δεν αποτελούν μόνο μια φυσική-αυτοεκπληρούμενη διαδικασία που είναι συνάρτηση της ηλικίας, αλλά συνιστούν περισσότερο μια εξέλιξη που σχετίζεται με την οργάνωση, το περιεχόμενο και τις μεθόδους διδασκαλίας.[29]

Για την επιτυχή ανάπτυξη των μαθητών στο κάθε επίπεδο σκέψης και την κατάκτηση των αντίστοιχων μαθηματικών γνώσεων, ο *P.M. van Hiele* προτείνει ένα θεωρητικό *μοντέλο πέντε φάσεων* για τη μαθησιακή διαδικασία. Διακρίνει τις εξής φάσεις:[30]

- ***Πληροφόρησης***, όπου συζητείται το αντικείμενο της μελέτης, γίνονται παρατηρήσεις, απευθύνονται ερωτήματα και εισάγεται το κατάλληλο λεξιλόγιο. Σκοπός της φάσης αυτής είναι η εξοικείωση των μαθητών με τα αντικείμενα και η πληροφόρηση του δασκάλου για τις προηγούμενες γνώσεις τους πάνω στο θέμα.
- ***Κατευθυνόμενης εργασίας***, κατά την οποία οι μαθητές εξερευνούν τα αντικείμενα και έρχονται σε επαφή με δραστηριότητες και υλικά που ο δάσκαλος έχει επιλέξει και ταξινομήσει, ώστε σταδιακά να οδηγηθούν στην ανακάλυψη των εννοιών που είναι χαρακτηριστικές για το επίπεδο στο οποίο βρίσκονται.
- ***Έκφρασης***, όπου οι μαθητές εκφράζουν και ανταλλάσσουν τις αναδυόμενες απόψεις τους, και αναπτύσσουν τα κατάλληλα γλωσσικά μέσα για την περιγραφή των σχέσεων που υπάρχουν.
- ***Ελεύθερης εργασίας***, στην οποία οι μαθητές ασχολούνται με πιο σύνθετες εργασίες διαβαθμισμένης δυσχέρειας, και εξερευνούν τις δραστηριότητες ελεύθερα με το δικό τους προσωπικό τρόπο.
- ***Ολοκλήρωσης***, όπου η νέα γνώση συνοψίζεται και ενσωματώνεται στο σύνολο των διαθέσιμων γνώσεων και ικανοτήτων, ενώ ταυτόχρονα σχηματίζεται μια σφαιρική άποψη για το νέο πλέγμα σχέσεων που προκύπτει.

Συγχρόνως με την ανάπτυξη των επιπέδων γεωμετρικής σκέψης των παιδιών, και επικουρικά για την ομαλή εξέλιξή τους σ' αυτά, λειτουργούν και καλλιεργούνται ορισμένες *δεξιότητες γεωμετρικής φύσης*. Στις παρακάτω πέντε περιοχές δεξιοτήτων *(οπτικές, λεκτικές σχεδίασης, λογικές, εφαρμογής)* παρουσιάζονται μέσα σε παρένθεση οι ικανότητες που αντιστοιχούν στα τρία πρώτα επίπε-

---

29 Κοντογιάννης, Δ. - Ντζιαχρήστος, Β., ... ό.π., σημ. 27, σελ. 439-440.

30 Κολέζα, Ε., *Γνωσιολογική* ..., ό.π., σημ. 18, σελ. 274-276· Τουμάσης, Μπ., ό.π., σημ. 1, σελ. 352-354· Φιλίππου, Γ. - Χρίστου, Κ., ό.π., σημ. 24, σελ. 115-117.

δα γεωμετρικής σκέψης (Ι, ΙΙ, ΙΙΙ) οι οποίες βαθμιαία πρέπει να αναπτυχθούν από τους μαθητές:[31]

- ✓ ***Οπτικές*** (Ι. Αναγνώριση σχημάτων και των πληροφοριών που αυτά δίνουν, ΙΙ. εντοπισμός σχημάτων και διάκριση των ιδιοτήτων τους, ΙΙΙ. αναγνώριση σχέσεων και επισήμανση κοινών ιδιοτήτων μεταξύ των σχημάτων).
- ✓ ***Λεκτικές*** (Ι. Συσχέτιση σχημάτων με τις αντίστοιχες ονομασίες και κατανόηση των σχημάτων από την περιγραφή τους, ΙΙ. αναφορά ιδιοτήτων των σχημάτων με χρήση κατάλληλης ορολογίας, ΙΙΙ. ενσυνείδητος ορισμός εννοιών και διατύπωση προτάσεων που αναδεικνύουν τις σχέσεις μεταξύ των σχημάτων).
- ✓ ***Σχεδίασης*** (Ι. Κατασκευή σχημάτων και ονομασία των μερών τους, ΙΙ. κατασκευή σχημάτων με βάση τις ιδιότητές τους, ΙΙΙ. δημιουργία σχημάτων από μετατροπή ή συνδυασμό άλλων).
- ✓ ***Λογικές*** (Ι. Αντίληψη ομοιοτήτων-διαφορών μεταξύ των σχημάτων και συνειδητοποίηση της διατήρησης των σχημάτων, ΙΙ. ομαδοποίηση και κατηγοριοποίηση των σχημάτων με βάση τις ιδιότητές τους, ΙΙΙ. χρησιμοποίηση των ιδιοτήτων για τη συμπερίληψη σχημάτων σε κλάσεις).
- ✓ ***Εφαρμογής*** (Ι. Αναγνώριση γεωμετρικών σχημάτων στα καθημερινά αντικείμενα, ΙΙ. αναγνώριση γεωμετρικών ιδιοτήτων στα φυσικά αντικείμενα, ΙΙΙ. κατανόηση της έννοιας του μαθηματικού μοντέλου που αντιπροσωπεύει σχέσεις).

Διδακτική εφαρμογή των επιπέδων γεωμετρικής σκέψης για το «Τετράγωνο»

Το ***«τετράγωνο»*** είναι ένα γεωμετρικό σχήμα με το οποίο τα παιδιά έρχονται από πολύ νωρίς σε επαφή, εκτελώντας δραστηριότητες και παιχνίδια. Ωστόσο, το ότι ένα παιδί μπορεί να ξεχωρίσει ένα τετράγωνο από ένα τρίγωνο (από τα 2 έτη) ή ότι μπορεί να «σχεδιάσει» ένα τετράγωνο (4 έτη) δεν σημαίνει πως έχει κατανοήσει τις έννοιες του τοπολογικού ή του ευκλείδειου ή του προβολικού χώρου, οι οποίες διέπουν και το τετράγωνο. Αυτό είναι κάτι το οποίο πραγματοποιείται προοδευτικά, κυρίως στο στάδιο των συγκεκριμένων νοητικών πράξεων ($7^{ο}$-$10^{ο}$ έτος). Συστηματική συμπεριφορά και κατανόηση των εννοιών τού ευκλείδειου χώρου θα πρέπει να αναμένεται από το στάδιο της τυπικής λογικής ($11^{ο}$-$12^{ο}$ έτος), δηλαδή όταν τα παιδιά βρίσκονται στις δύο τελευταίες τάξεις του Δημοτικού Σχολείου, και αργότερα.[32]

Στο νέο *Πρόγραμμα Σπουδών* των Μαθηματικών του Δημοτικού Σχολείου γίνεται σαφής αναφορά για την ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης και των ικανοτήτων των παιδιών σε επίπεδα, σύμφωνη με το θεωρητικό πλαίσιο που πα-

31 Κοντογιάννης, Δ. - Ντζιαχρήστος, Β., ό.π., σημ. 27, σελ. 476-477.

32 Botson, Cl. - Deliege, M., *Οι Προμαθηματικές Διαδικασίες και Έννοιες – Συμβολή στην Κατανόηση της Γνωστικής Ψυχολογίας του J. Piaget* (επιμ. Γ.Μ. Τρούλης), Gutenberg, Αθήνα 1998, σελ. 10-11, 82-88.

ρουσιάστηκε στην προηγούμενη ενότητα. Διατυπώνεται, επίσης, ότι οι μαθητές τελειώνοντας την ΣΤ′ τάξη πρέπει να είναι ικανοί:[33]

– *να χειρίζονται με άνεση τα γεωμετρικά όργανα,*

– *να χρησιμοποιούν ένα στοιχειώδες γεωμετρικό λεξιλόγιο,*

– *να αναγνωρίζουν σχήματα από μια εικόνα ή από μια λεκτική περιγραφή,*

– *να διακρίνουν τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά ενός σχήματος και να περιγράφουν με άνεση τις ιδιότητές του, χρησιμοποιώντας το κατάλληλο λεξιλόγιο,*

– *να χρησιμοποιούν τις ιδιότητες ενός σχήματος, για να το κατασκευάζουν, όπως και τις ιδιότητες κάποιων στερεών, για να κατασκευάζουν τα αναπτύγματά τους,*

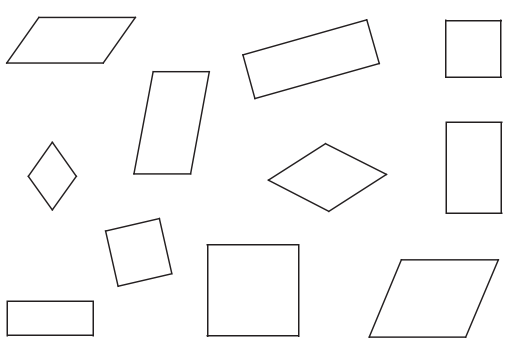
– *να ομαδοποιούν σχήματα ανάλογα με τις ιδιότητές τους,*

– *να αναγνωρίζουν τις γεωμετρικές ιδιότητες φυσικών αντικειμένων,*

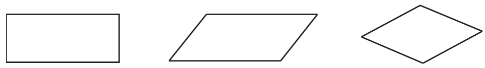
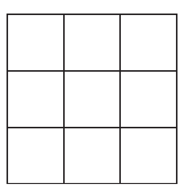
– *να χρησιμοποιούν τεχνικές μετασχηματισμού σχημάτων (αξονική συμμετρία, μεταφορά, μεγέθυνση, σμίκρυνση).*

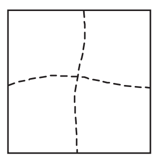
΄Ετσι, για την επίτευξη των παραπάνω σχετικά με το διδακτικό αντικείμενο «Το τετράγωνο», παρατίθενται στον *Πίνακα 1* προτεινόμενες δραστηριότητες, βασισμένες στα επίπεδα γεωμετρικής σκέψης των van Hiele και στην αντίστοιχη ανάπτυξη των δεξιοτήτων γεωμετρικής φύσης.

Πίνακας 1: Διδακτικές δραστηριότητες για το Τετράγωνο

Δραστηριότητες	**Διδακτική Θεώρηση**
Δραστηριότητα 1η α) Ταξινομήστε τα παρακάτω σχήματα σε κατηγορίες: 	**Ι. Επίπεδο Αναγνώρισης** *Οπτικές ικανότητες*

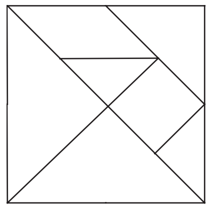
33 ΥΠ.Ε.Π.Θ., *Προγράμματα Σπουδών Πρωτοβάθμιας και Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης – Θετικές Επιστήμες* (υπεύθ. έκδ. Χρ. Δούκας), ΥΠΕΠΘ-Π.Ι., Αθήνα 2000, σελ. 13-14.

β) Γνωρίζοντας ότι τα σχήματα:  δεν είναι «τετράγωνα», σε ποια από τις κατηγορίες τής ταξινόμησης που κάνατε θα δίνατε αυτό τον τίτλο;	
Δραστηριότητα 2η α) Σχεδιάστε σε τετραγωνισμένο χαρτί ένα τετράγωνο. Βάλτε στις «μύτες» του τα γράμματα Α, Β, Γ, Δ. Χαράξτε τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ και ΒΔ.	*Ικανότητες σχεδίασης*
β) Πώς λέγονται τα σημεία Α, Β, Γ, Δ, πώς τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ και πώς τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ, ΒΔ του τετραγώνου;	*Λεκτικές ικανότητες*
γ) Κόψτε το τετράγωνο που σχεδιάσατε. Περιεργαστείτε το και παρατηρήστε το από διάφορες θέσεις και διαφορετικές μεριές. Αλλάξτε του θέση στο χώρο. Πώς φαίνεται; Εξακολουθεί να είναι τετράγωνο;	*Λογικές ικανότητες*
Δραστηριότητα 3η α) Περιγράψτε τα τετράγωνα αντικείμενα της τάξης ή του χώρου στον οποίο ζείτε. Τι μπορείτε να σχολιάσετε σχετικά για το σκάκι, το ζάρι ή τις πυραμίδες; β) Φτιάξτε μικρά τετράγωνα με οδοντογλυφίδες και μεγαλύτερα με καλαμάκια. Πόσα κομμάτια χρειάζεστε για το κάθε τετράγωνο; Κολλήστε τα σε χαρτόνι και ονομάστε τα.	*Ικανότητες εφαρμογής*
Δραστηριότητα 4η	**ΙΙ. Επίπεδο Περιγραφικό**
α) Πόσα τετράγωνα μπορείτε να διακρίνετε στο παρακάτω σχέδιο; 	*Οπτικές ικανότητες*

Δραστηριότητα 5η α) Προσπαθήστε να σχεδιάσετε σε λευκό χαρτί ένα τετράγωνο πλευράς 4 εκ. Ποιες δυσκολίες αντιμετωπίζετε; Ποια γεωμετρικά όργανα θα χρειαστείτε για τη σχεδίασή του; Πόσες και τι είδους γωνίες έχει το τετράγωνο; Πόσες πλευρές έχει το τετράγωνο και τι σχέση έχουν μεταξύ τους; β) Κόψτε το τετράγωνο που σχεδιάσατε και χαράξτε τις διαγώνιές του. Πόσες διαγώνιες έχει το τετράγωνο και τι σχέση έχουν μεταξύ τους; γ) Διπλώστε το τετράγωνο κατά μήκος τής μιας διαγωνίου του. Τι σχήματα προκύπτουν; Τι σχέση έχουν μεταξύ τους; Είναι συμμετρικά; Με ποιους άλλους τρόπους μπορείτε να διπλώσετε το τετράγωνο, ώστε να προκύψουν συμμετρικά σχήματα; δ) Κόψτε τις 4 γωνίες του τετραγώνου. Τι μέτρο έχει η καθεμιά; Βάλτε διαδοχικά τη μία δίπλα στην άλλη. Πόσο είναι το άθροισμα των γωνιών ενός τετραγώνου; Μπορείτε να καταλήξετε στο ίδιο συμπέρασμα, ξέροντας ότι η διαγώνιος του τετραγώνου το χωρίζει σε δύο ίσα τρίγωνα; 	*Ικανότητες σχεδίασης*
Δραστηριότητα 6η α) Περιγράψτε στα άλλα μέλη της ομάδας σας ένα τετράγωνο, με βάση τις ιδιότητές του. Φτιάξτε έναν πίνακα με τις ιδιότητες και τα χαρακτηριστικά του τετραγώνου που έχετε βρει μέχρι τώρα ή και άλλα, που μπορείτε να διαισθανθείτε. Συντάξτε ενδιαφέροντα σχετικά αινίγματα.	*Λεκτικές ικανότητες*
β) Συζητήστε και σχολιάστε τις παρακάτω προτάσεις: ΄Ενα τετράγωνο είναι και παραλληλόγραμμο. ΄Ενα τετράγωνο είναι και ορθογώνιο. Οι διαγώνιοι ενός τετραγώνου το χωρίζουν σε τέσσερα ορθογώνια τρίγωνα, ίσα μεταξύ τους.	*Λογικές ικανότητες*
Δραστηριότητα 7η α) Ξεδιπλώστε μια χαρτοπετσέτα. Ποια σχήματα διακρίνετε;	*Ικανότητες εφαρμογής*

β) Ενώστε τέσσερα ίσα τετράγωνα με διάφορους τρόπους. Τι σχήματα μπορούν να προκύψουν;	**III. Επίπεδο Άτυπης Αφαίρεσης**
Δραστηριότητα 8η Φωτίστε ένα τετράγωνο και δείτε τη σκιά του. Μετατοπίστε το και περιστρέψτε το. Τι σχήματα παίρνει η σκιά του;	*Οπτικές ικανότητες*
Δραστηριότητα 9η α) Συναρμολογήστε με διπλόκαρφα 4 χαρτοταινίες ίσων διαστάσεων και φτιάξτε ένα τετράγωνο.[34] Αποτυπώστε το περίγραμμα του τετραγώνου σε χαρτί και χαράξτε τις διαγώνιές του. Μετά τραβήξτε τις δύο απέναντι κορυφές του τετραγώνου έτσι, ώστε να αλλάξει σχήμα. Αποτυπώστε το περίγραμμα του νέου σχήματος σε χαρτί και χαράξτε τις διαγώνιές του. Τι σχήμα προέκυψε; β) Ποιες ομοιότητες και ποιες διαφορές παρατηρείτε μεταξύ τετραγώνου και ρόμβου;	*Λεκτικές ικανότητες*
Δραστηριότητα 10η α) Σχεδιάστε σε τετραγωνισμένο χαρτί διάφορα τετράπλευρα. Παρατηρήστε τα και συζητήστε μεταξύ σας γι’ αυτά. Να τα ονομάστε και να επισημάνετε τις ομοιότητες και τις διαφορές τους.	*Λογικές ικανότητες*
β) Προσπαθήστε με τα σχήματα αυτά να καλύψετε την επιφάνεια του βιβλίου σας. Με τη χρήση ποιου είδους πιστεύετε ότι θα καλυπτόταν πλήρως; γ) Βάλτε σε μια λογική σειρά τις έννοιες: ορθογώνια, τετράπλευρα, παραλληλόγραμμα, πολύγωνα, τραπέζια, τετράγωνα. Εξηγήστε και δικαιολογήστε το διάγραμμά σας.	*Ικανότητες σχεδίασης*
Δραστηριότητα 11η α) Σχεδιάστε ένα τετράγωνο με τις διαγώνιές του. Κόψτε τα 4 τρίγωνα που σχηματίζονται. Με αυτά να κατασκευάστε τα εξής σχήματα: ισοσκελές τρίγωνο, ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, πλάγιο παραλληλόγραμμο, ισοσκελές τραπέζιο.	

34 Χιονίδου-Μοσκοφόγλου, Μ.: Μένων (Πλάτων) - Μαθηματικά – Μια βιωματική διαθεματική δραστηριότητα στη διδασκαλία των μαθηματικών, στο: *Πρακτικά του 19ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας* (σελ. 204-213), Κομοτηνή 2002, σελ. 208.

β) Να κατασκευάσετε σε τετραγωνισμένο χαρτί ένα «κινέζικο τετράγωνο», όπως στο υπόδειγμα, και μετά να φτιάξετε τετράγωνα χρησιμοποιώντας 1, 2, 3, 4, 5 ή 7 κομμάτια του.[35]  *Κινέζικο τετράγωνο*	
Δραστηριότητα 12η Σε ποια αντικείμενα ή κατασκευές θα μπορούσε να αντικατασταθεί το σχήμα του τετραγώνου που έχουν με κάποιο άλλο σχήμα; Γράψτε τις σχετικές παρατηρήσεις σας.	*Ικανότητες εφαρμογής*

35 Φιλίππου, Γ. - Χρίστου, Κ., ό.π., σημ. 24, σελ. 301, 355.

Βιβλιογραφία

Botson, Cl., - Deliege, M., *Οι Προμαθηματικές Διαδικασίες και Έννοιες. Συμβολή στην Κατανόηση της Γνωστικής Ψυχολογίας του J. Piaget* (επιμ. Γ. Μ. Τρούλης), Gutenberg, Αθήνα, 1998.

Brink, F. J. van den, Η ρεαλιστική αριθμητική στην εκπαίδευση για τα μικρά παιδιά, στο: L. Streefland (ed.), *Ρεαλιστικά Μαθηματικά στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση* (επιμ. Ε. Κολέζα), Leader Books, Αθήνα, 2000.

Εξαρχάκος, Θ. Γ., *Διδακτική των Μαθηματικών*, Ελληνικά Γράμματα, Αθήνα, 1993.

Ζάχος, Ι. Β., Αξιολόγηση του Επιπέδου Γεωμετρικής Σκέψης van Hiele των Μαθητών της Βæ Τάξης του Λυκείου, στο: Φρ. Καλαβάσης – Μ. Μεϊμάρης (επιμ.) *Αξιολόγηση και Διδασκαλία των Μαθηματικών*, Gutenberg – Πανεπιστήμιο Αιγαίου, Αθήνα, 2000.

Freudenthal, H., *Weeding and Sowing: Preface to a Science of Mathematical Education*, D. Reidel, Dordrecht, 1980.

Freudenthal, H., *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*, D. Reidel, Dordrecht, 1983.

Gravenmeijer, K. P. E., Ένας διδακτικο-θεωρητικός συλλογισμός σχετικά με τη χρήση χειρισμών, στο: L. Streefland (ed.), *Ρεαλιστικά Μαθηματικά στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση* (επιμ. Ε. Κολέζα), Leader Books, Αθήνα, 2000.

Καραγεώργος, Δ., *Το πρόβλημα και η επίλυσή του. Μια διδακτική προσέγγιση*, Σαββάλας, Αθήνα, 2000.

Κολέζα, Ε., Πρόλογος, στο: L. Streefland (ed.), *Ρεαλιστικά Μαθηματικά στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση* (επιμ. Ε. Κολέζα), Leader Books, Αθήνα, 2000.

Κολέζα, Ε., *Γνωσιολογική και Διδακτική Προσέγγιση των Στοιχειωδών Μαθηματικών Εννοιών*, Leader Books, Αθήνα, 2000.

Κοντογιάννης, Δ. – Ντζιαχρήστος, Β., *Βασικές έννοιες της Γεωμετρίας*, (4η έκδ.), Αθήνα, 2003.

Λεμονίδης, Χ., Μια νέα πρόταση διδασκαλίας στα Μαθηματικά για τις πρώτες τάξεις του δημοτικού σχολείου, *Θέματα στην Εκπαίδευση*, 3:1, Leader Books, Αθήνα, 2002.

Moor, E. de, Η διδασκαλία της Γεωμετρίας στην Ολλανδία (ηλικίες 4-14). Η ρεαλιστική προσέγγιση, στο: L. Streefland (ed.), *Ρεαλιστικά Μαθηματικά στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση* (επιμ. Ε. Κολέζα), Leader Books, Αθήνα, 2000.

Τουμάσης, Μπ., *Σύγχρονη Διδακτική των Μαθηματικών*, Gutenberg, Αθήνα, 2000.

Υ.Π.Ε.Π.Θ. – Π.Ι., *Προγράμματα Σπουδών Πρωτοβάθμιας και Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης – Θετικές Επιστήμες* (υπεύθ. έκδ. Χρ. Δούκας), Αθήνα, 2000.

Treffers, A., Το Διδακτικό Υπόβαθρο ενός προγράμματος Μαθηματικών στο Δημοτικό Σχολείο, στο: L. Streefland (ed.), *Ρεαλιστικά Μαθηματικά στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση* (επιμ. Ε. Κολέζα), Leader Books, Αθήνα, 2000.

Υ.Π.Ε.Π.Θ. – Π.Ι., *Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών (Δ.Ε.Π.Π.Σ.) και Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών (Α.Π.Σ.) Υποχρεωτικής Εκπαίδευσης* (τόμ. Αæ), Αθήνα, 2002.

Φιλίππου, Γ. – Χρίστου, Κ., *Διδακτική των Μαθηματικών*, Τυπωθήτω – Γ. Δαρδανός, Αθήνα, 2000.

Χιονίδου – Μοσκοφόγλου, Μ., Το Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο *Προγράμματος Σπουδών* (Δ.Ε.Π.Π.Σ.) των Μαθηματικών στην υποχρεωτική εκπαίδευση, *Επιθεώρηση Εκπαιδευτικών Θεμάτων,* 7, Αθήνα, 2002.

Χιονίδου – Μοσκοφόγλου, Μ.: Μένων (Πλάτων) – Μαθηματικά – Μια βιωματική διαθεματική δραστηριότητα στη διδασκαλία των μαθηματικών, στο*: Πρακτικά του* $19^{ου}$ *Πανελλήνιου Συνεδρίου της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας,* Κομοτηνή, 2002.